buktiga ytorna, finner man precis på samma sätt, att även dessa linjer ha den egenskapen, att de äro de kortaste linjer, som kunna dragas mellan två punkter v. s. h. på en sådan yta. Den kortaste linje, som kan dragas mellan två punkter på en yta v. s. h. kallas för en *geodetisk linje.* Mot den räta linjen i planet svarar alltså den geodetiska linjen på sfären och psevdosfären resp.

Man inser lätt, att på klotytan blir den geodetiska linjen en *storcirkelbåge,* ty mellan två punkter v. s. h. på en begränsad tillräckligt liten del av en klotyta kan man ej lägga mer än en storcirkelbåge (jfr ax. 10). För att detta villkor skall vara uppfyllt, måste den storcirkelbåge, som förenar de två fixa punkterna på klotytan vara mindre än halva storcirkeln. Någon motsvarande inskränkning förekommer ej i fråga om psevdosfären.

Satsernas generalisering. Alla satser i Euklides' geometri, som ej förutsätta, att en rät linje kan dragas ut huru långt som helst, gälla således även för sfären. Dessa satser äro I: 1—26 C; III: 1—18, 26 a), 28, 29; IV: 4, 5, 13, 14. Sålunda gälla de fyra kongruensfallen och satsen om mittpunktsnormalen även för en klotyta. Härvid är dock att märka, att då storcirkelbågen måste vara mindre än halva storcirkeln, så gäller ej I: 16 och de därpå grundade satserna med säkerhet för större figurer än sådana, där storcirkelbågarna äro mindre än storcirkelkvadranten. Ty i beviset för I: 16 drages en rät linje ut till sin dubbla längd (s. 36).

Anm. 1. Detsamma som sagts om I: 16 synes även gälla I: 8, men Euklides själv har ett annat bevis för denna sats, varvid han betjänar sig av den här uteslutna I: 7 (jfr övn. 20), där en fördubbling av figuren ej förekommer.

Anm. 2. En viktig tillämpning på kongruensfallens användning på klotytan har man i beviset för satsen, att varje förflyttning av en stel kropp, som har en fix punkt, kan åstadkommas genom en enda vridning omkring en axel.

Det tolfte axiomet. Det är tydligt att det tolfte axiomet inte gäller för klotytan, eftersom inga parallella »räta» linjer alls existera på denna yta. På psevdosfären däremot kan man draga parallella »räta» linjer, men för dessa gäller ej det tolfte axiomet. Man har häri den karakteristiska egenskap som åtskiljer de tre grundformerna av ytor av konstant krökning:

1:o. Genom en yttre punkt kan man ej lägga någon rät linje parallell med en given rät linje — *sfären.*
2:o. » » » » » » lägga en och endast en rät linje parallell med en given rät linje — *planet.*
3:o. » » » » » » lägga mer än en rät linje parallell med en given rät linje — *psevdosfären.*

Anm. För psevdosfären gälla alla satser, som gälla för sfären, och dessutom I: 27—28.

En olägenhet med denna metod att karakterisera de tre slagen ytor är den, att den förutsätter, att ytan är obegränsad. Men en del av de ytor, som kunna bredas ut i en yta av någon av de nyssnämnda grundformerna äro begränsade, och ändå gälla även om dem de flesta satser, som gälla för grundformen. I stället för parallella linjer kan man med större fördel betrakta vinkelsumman i en triangel, och man finner:

Vinkelsumman i en triangel är större än två räta för sfären,
» » » » lika med » » » planet,
» » » » mindre än » » » psevdosfären.

Anm. Legendre har bevisat, att om vinkelsumman i en enda triangel är $\gtreqless 2R$, så är den $\gtreqless 2R$ resp. i alla trianglar.