$\boxed{4324}$ (e) $z^4 + 16 = 0$

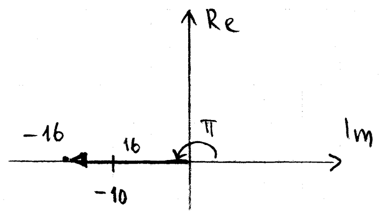
$z^4 = -16 \quad (*)$

Ansätt $z = r(\cos v + i \sin v)$

Då är $z^4 = r^4(\cos 4v + i \sin 4v)$

Skriv -16 på polär form:

$-16 = 16(\cos \pi + i \sin \pi)$



Huvudiden är att skriva VL och HL i $(*)$ på polär form, förenkla och sedan jämföra belopp och argument

Då kan vi skriva ekvationen $(*)$ som

$$r^4(\cos 4v + i \sin 4v) = 16(\cos \pi + i \sin \pi) \quad (**)$$

Två komplexa tal på polär form är lika om 1) beloppen är lika 2) argumenten är lika sånär som på ett helt antal 2π

ty sin och cos är periodiska med perioden 2π

VL = HL om

$r^4 = 16$ och $4v = \pi + n \cdot 2\pi$

$r = (\pm)\sqrt[4]{16}$ $\quad v = \dfrac{\pi}{4} + n \cdot \dfrac{2\pi}{4}$ n heltal

$r = 2$

Absolutbeloppet r är alltid positivt!

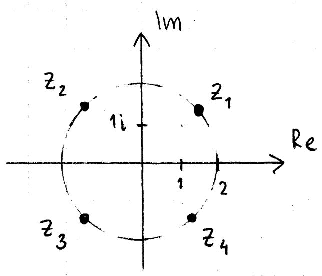
Nu kan vi göra en lista med rötterna till $(*)$:

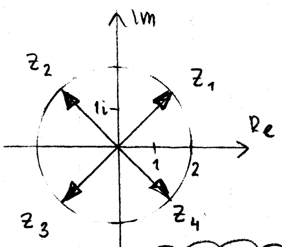
$n = 0: \quad v = \dfrac{\pi}{4}: \quad z_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$n = 1 \quad v = \dfrac{3\pi}{4} \quad z_2 = 2\left(\cos\dfrac{3\pi}{4} + i \sin\dfrac{3\pi}{4}\right)$

$n = 2 \quad v = \dfrac{5\pi}{4} \quad z_3 = 2\left(\cos\dfrac{5\pi}{4} + i \sin\dfrac{5\pi}{4}\right)$

$n = 3: \quad v = \dfrac{7\pi}{4} \quad z_4 = 2\left(\cos\dfrac{7\pi}{4} + i \sin\dfrac{7\pi}{4}\right)$





Rötterna kan sammanfattas i

$$\boxed{z_{n+1} = 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{2\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{4} + n\frac{2\pi}{4}\right)\right), \quad n = 0, 1, 2, 3}$$

Skulle kunna göra omskrivningen $\dfrac{\pi}{4} + n\dfrac{2\pi}{4} = \dfrac{(2n+1)\pi}{4}$ om vi vill. Lite snyggare!

$n = 4$ skulle ge talet z_1 igen. Ty $2\left(\cos\dfrac{9\pi}{4} + i \sin\dfrac{9\pi}{4}\right)$ är samma tal som $2\left(\cos\dfrac{\pi}{4} + i \sin\dfrac{9\pi}{4}\right)$ eftersom $\cos\dfrac{\pi}{4} = \cos\left(\dfrac{\pi}{4} + 2\pi\right) = \cos\dfrac{9\pi}{4}$ och likadant för sinus.

cos är periodisk med perioden 2π

För att komma till att $4v = \pi + n\,2\pi$ från $(**)$ kan man

också resonera så här:

Om VL ska vara lika med HL i $(**)$ måste

$\cos 4v = \cos\pi$ (1) <u>och</u> $\sin 4v = \sin\pi$ (2)

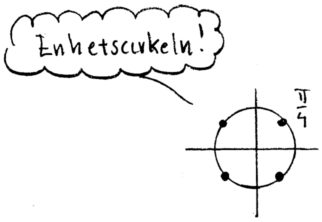
Dessa ekvationer ger att

$4v = \pm\pi + n\cdot 2\pi$ <u>och</u> $4v = \pi + n\cdot 2\pi$ eller $4v = \pi - \pi + n\cdot 2\pi$

(n heltal)

Fall 1:

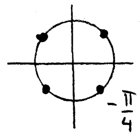
$$4v = \pi + n\cdot 2\pi$$



$$v = \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{2\pi}{4}$$

Fall 2

$$4v = -\pi + n\cdot 2\pi$$

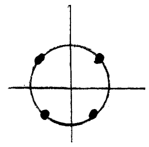


$$v = -\frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{2\pi}{4}$$

Fall A:

$$4v = \pi + n\cdot 2\pi$$

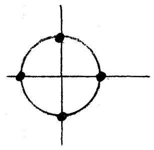
$$v = \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{2\pi}{4}$$



Fall B:

$$4v = n\cdot 2\pi$$

$$v = n\cdot\frac{2\pi}{4}$$



De enda av alla lösningar till (1) respektive (2) som

är lösningar till <u>både</u> (1) och (2) är alltså

$$v = \frac{\pi}{4} + n\cdot\frac{2\pi}{4}, \quad n \text{ heltal.}$$